数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 44-57

代数群と形式代数群の変形の例について

中央大・理工　関口　力 (Tsutomu Sekiguchi)
東京電機大・工　諏訪紀幸 (Noriyuki Suwa)

1 Introduction

W_n あるいは $\widehat{W}_n$ によって $\mathbb{Z}$ 上の長さ n の群スキームあるいは形式群スキームとし，W あるいは $\widehat{W}$ によって Witt vector のなす群スキームあるいは形式群スキームを表す。また，$\mathbb{G}_m$ あるいは $\widehat{\mathbb{G}}_m$ によって $\mathbb{Z}$ 上の乗法群あるいは形式乗法群を表す。F によって，W あるいは $\widehat{W}$ の Illusie [2] によって一般化された Frobenius 自己準同型写像を表す。以下，素数 p を固定する。

我々は，前論文 [5,9] により任意の $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数 A に対して，群 $\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A})$ あるいは $\mathrm{Ext}^1_A(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ の具体的な表現を与えた。実際に Artin-Hasse exponential series を用いて同型写像

$$
\begin{aligned}
{}_{F^n}\widehat{W}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
\widehat{W}(A)/F^n &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(W_{n,A}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
{}_{F^n}W(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),\\
W(A)/F^n &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\widehat{W}_{n,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}).
\end{aligned}
$$

が与えられるのである。特に $n=1$ のとき，この結果は

$$
(*)\qquad
\begin{aligned}
{}_{F}\widehat{W}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
\widehat{W}(A)/F &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
{}_{F}W(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\widehat{\mathbb{G}}_{a,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),\\
W(A)/F &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{G}}_{a,A}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}).
\end{aligned}
$$

と表される。

一方，$A\setminus(\{0\}\cup A^{\times})$ の元 λ に対して, A 上の群スキーム

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}A[x, 1/(\lambda x+1)]; \quad x\cdot y = x+y+\lambda xy$$

は群スキーム $\mathbb{G}_a$ から $\mathbb{G}_m$ への変形を与える。我々の目的は，Artin-Hasse exponential series を変形することにより, 同型 (*) を $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ へ一般化することである。実際，我々の結果は次の形で与えられる。

定理. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数とし，λ を A のべき零元とする。このとき，同型

$$\begin{aligned}
{}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
\widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}),\\
{}_{F^{(\lambda)}}W(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),\\
W(A)/F^{(\lambda)} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})
\end{aligned}$$

を得る。ただし，$F^{(\lambda)}$ は *Frobenius* 自己準同型 F の変形である。

2 Artin-Hasse exponential series の変形

Artin-Hasse exponential series

$$E_p(X) = \exp(X + p^{-1}X^p + p^{-2}X^{p^2} + \cdots)$$

の変形を与えるために，[HZ] より Functional equation lemma を引用する。

A を環 K の部分環とし，$\sigma : K \longrightarrow K$ を環準同型, $\mathfrak{A}$ を A のイデアル, $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ を K の与えられた元とする。q を p のベキとし，我々は次を仮定する。

仮定

(1) $\sigma(A)\subset A$; $\sigma(a)\equiv a^q \mod \mathfrak{A}$ for all $a\in A$.

(2) $p\in\mathfrak{A}$; $s_i\mathfrak{A}\subset A$ for $i=1,2,\ldots$.

ベキ級数 $g(X)=\sum_{i=1}^{\infty} b_iX^i\in A[[X]]$ に対して，ベキ級数 $f_g(X)$ in $K[[X]]$ を次で定義する。

$$(1) \qquad f_g(X) = g(X) + \sum_{i=1}^{\infty} s_i \sigma_*^i f_g(X^{q^i}),$$

ただし，ベキ級数 $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell X^\ell \in K[[X]]$ に対して $\sigma_*^i \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell X^\ell\right) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma^i(a_\ell) X^\ell$ である。

$$f_g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i X^i,$$

とおくとき，関数等式 (1) は次の漸化式と同値である。

$$(2) \qquad d_n = b_n + s_1 \sigma(d_{n/q}) + \cdots + s_r \sigma^r(d_{n/q^r})$$

ただし，$n = q^r m$ かつ $q \nmid m$ とする。これら記号の下に，次が成り立つ。

補題 2.1 (Functional equation lemma; cf [HZ], Chap. I, §2) $A[[X]]$ のベキ級数 $g_1(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X^i$, $g_2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} b'_i X^i$ に対して，b_1 は A の可逆元とする。このとき，次を得る。

(*i*) $F_{g_1}(X, Y) := f_{g_1}^{-1}(f_{g_1}(X) + f_{g_2}(Y)) \in A[[X, Y]]$.

(*ii*) $f_{g_1}^{-1}(f_{g_2}(X)) \in A[[X]]$.

(*iii*) $A[[X]]$ のベキ級数 $h(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$ に対して, $A[[X]]$ のベキ級数 $\hat{h}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n X^n \in A[[X]]$ が存在し $f_{g_1}(h(X)) = f_{\hat{h}}(X)$ を満たす。

(*iv*) $\alpha(X) \in A[[X]]$, $\beta(X) \in K[[X]]$ と正整数 $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\alpha(X) \equiv \beta(X) \mod \mathfrak{A}^r A[[X]] \Leftrightarrow f_{g_1}(\alpha(X)) \equiv f_{g_2}(\beta(X)) \mod \mathfrak{A}^r A[[X]]$$

が成り立つ。

特に，$A \supset \mathbb{Z}_{(p)}$, $K \supset \mathbb{Q}$, $\sigma|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$ and $\mathfrak{A} \supset p\mathbb{Z}_{(p)}$ とおき，$q = p$,

$$s_1 = p^{-1}, s_2 = s_3 = \cdots = 0$$

とおくとき，$g_2(X) = X$ に対して (1) により

$$(3) \qquad f_{g_2}(X) = X + p^{-1} X^p + p^{-2} X^{p^2} + \cdots$$

また $g_1(X) = -\sum_{(n,p)=1} n^{-1}X^n$ に対して

(4) $$f_{g_1}(X) = \log(1-X) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n}$$

を得る。これら g_1, g_2 に補題 2.1, (ii) を適用すれば，Artin-Hasse exponential series $E_p(X)$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上定義されることがわかる。

以下，変数 λ, μ に対して，$A = \mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu/\lambda]$，$K = \mathbb{Q}[\lambda, \mu/\lambda]$ とおき，準同型 $\sigma : K \longrightarrow K$ を $f(\lambda,\mu) \in K = \mathbb{Q}[\lambda, \mu/\lambda]$ に対して

$$\sigma\left(f(\lambda,\mu)\right) = f(\lambda^p, \mu^p)$$

で定義し，$\mathfrak{A} = pA$ とおく。このとき $f(\lambda,\mu) \in A$ に対して

$$\sigma\left(f(\lambda,\mu)\right) \equiv f(\lambda,\mu)^p \mod \mathfrak{A}$$

が成り立つ。更に

$$s_1 = p^{-1}, s_2 = s_3 = \cdots = 0$$

とおき

(5) $$g_3(X) = -\sum_{(n,p)=1}\frac{\mu}{\lambda}\frac{\lambda^n}{n}X^n$$

とおく。このとき (2) によって，ベキ級数

$$f_{g_3}(X) = d_1X + d_2X^2 + \cdots$$

は，$r \geq 0$，$m \geq 1$ with $(m,p) = 1$ とするとき

(6) $$d_{p^r m} = b_{p^r m} + s_1\sigma(d_{p^{r-1}m})$$

で与えられる。更に，(6) は

(7) $$d_{p^r m} = \frac{1}{p^r}\sigma^r(d_m) = -\frac{1}{p^r}\frac{\mu^{p^r}}{\lambda^{p^r}}\frac{\lambda^{p^r m}}{m}$$

と書き直される。これより，元 $a \in K$ と正整数 n に対して

$$\wp(a) := a^p - a.$$

とおくとき，容易に分かる通り

$$f_{g_3}(X) = \log\left\{(1-\lambda X)^{\frac{\mu}{\lambda}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-\lambda^{p^n} X^{p^n})^{\frac{1}{p^n}\wp((\mu/\lambda)^{p^{n-1}})}\right\} \tag{8}$$

を得る。従って，補題 2.1, (2) を g_1 と g_3 に適用することにより，関数

$$E_p(\mu:\lambda; X) := (1+\lambda X)^{\frac{\mu}{\lambda}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1-(-1)^{p^n} X^{p^n}\right\}^{\frac{1}{p^n}\wp\left(\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{p^{n-1}}\right)} \tag{9}$$

は $A[[X]]$ の元であることが分かり，更に $\mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu][[X]]$ に含まれることが分かる。従って，任意の環準同型写像

$$\alpha : \mathbb{Z}_{(p)}[\lambda, \mu] \to B$$

に対して

$$E_p(\alpha(\mu) : \alpha(\lambda); X) \in B[[X]]$$

が定義される。容易に分かるとおり

$$E_p(1:0; X) = E_p(X)$$

であり， $E_p(\mu:\lambda; X)$ は Artin-Hasse exponential series $E_p(X)$ の変形を与えていることが分かる。

3 Frobenius endomorphism の変形

以下，ここでは W あるいは $\widehat{W}$ の Frobenius 自己準同型 F の変形を扱う。

各 $r = 0, 1, \ldots$ について，Witt 多項式 $\Phi_r(\mathbb{T}) = \Phi_r(T_0, T_1, \ldots, T_r) \in \mathbb{Z}[\mathbb{T}] = \mathbb{Z}[T_0, T_1, \cdots]$ を

$$\Phi_r(\mathbb{T}) = T_0^{p^r} + pT_1^{p^{r-1}} + \cdots + p^r T_r$$

とおく。 変数 Λ をとり，$A_0 = \mathbb{Z}[\Lambda]$ とおく。ここで，phantom morphism

$$\Phi : W \to \mathbb{G}_a^{\infty} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\mathbb{T}], \tag{10}$$

また

$$\Phi^{(\Lambda)} : W_{A_0} \to \mathbb{G}_{a,A_0}^{\infty} \tag{11}$$

を

(12) $$\Phi(\mathbb{T}) := (\Phi_0(\mathbb{T}), \Phi_1(\mathbb{T}), \dots)$$

と

(13) $$\Phi^{(\Lambda)}(\mathbb{T}) := (\Phi_1(\mathbb{T}) - \Lambda^{p-1}\Phi_0(\mathbb{T}), \Phi_2(\mathbb{T}) - \Lambda^{p(p-1)}\Phi_1(\mathbb{T}), \dots)$$

で定義する。明らかに，自己準同型写像

(14) $$F^{(\Lambda)} := (\Phi)^{-1}\,\Phi^{(\Lambda)} : W_{\mathbb{Q}[\Lambda]} \longrightarrow W_{\mathbb{Q}[\Lambda]}$$

は $\mathbb{Q}[\Lambda]$ 上定義され，$F^{(0)}$ は Illusie [2] によって定義された Frobenius endomorphism である。更に，Witt 群スキームが $\mathbb{Z}$ 上定義されることを証明するときと全く同様の方法によって，次を得る。

補題 3.1 $F^{(\Lambda)} : W \longrightarrow W$ は $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 上定義される。

W の元 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots)$ に対して，ベキ級数 $E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X)$ を

(15) $$E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X) := E_p(a_0 : \Lambda; Z)E_p(a_1 : \Lambda^p; X^p)E_p(a_2 : \Lambda^{p^2}; X^{p^2})\cdots$$

によって定義する。このとき，定義 (9) により次を得る。

補題 3.2

$$\begin{aligned} E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X) = (1+\Lambda X)^{\frac{1}{\Lambda}\Phi_0(\boldsymbol{a})}&(1+\Lambda^p X^p)^{\frac{1}{p\Lambda^p}\Phi_0(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}))} \\ &\cdot (1+\Lambda^{p^2}X^{p^2})^{\frac{1}{p^2\Lambda^{p^2}}\Phi_1(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}))}\cdots \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \frac{E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X)E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; Y)}{E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X+Y+\Lambda XY)} &= \left(\frac{(1+\Lambda^p X^p)(1+\Lambda^p Y^p)}{1+\Lambda^p(X+Y+\Lambda XY)^p)}\right)^{\frac{1}{p\Lambda^p}\Phi_0(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}))} \\ \cdot \left(\frac{(1+\Lambda^{p^2}X^{p^2})(1+\Lambda^{p^2}Y^{p^2})}{1+\Lambda^{p^2}(X+Y+\Lambda XY)^{p^2})}\right)^{\frac{1}{p^2\Lambda^{p^2}}\Phi_1(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}))} &\cdots\cdots \end{aligned}$$

次は，この補題 3.2 の直接の結果である。

補題 3.3 W あるいは $\widehat{W}$ の元 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots)$ に対して，関数等式

$$E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X)E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; Y) = E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY) \tag{16}$$

が成り立つことと， $\boldsymbol{a}$ が ${}_{F^{(\Lambda)}}W = \mathrm{Ker}\left(F^{(\Lambda)} : W \to W\right)$ あるいは ${}_{F^{(\Lambda)}}\widehat{W}$ に含まれることと同値である。

更に，W の元 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対して

$$E_p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} : \Lambda; X) = E_p(\boldsymbol{a} : \lambda; X)E_p(\boldsymbol{b} : \lambda; X)$$

が成り立つ。

4 Cocycles

Witt vector $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \dots)$ に対して，ベキ級数 $F_p(\boldsymbol{b} : \Lambda; X, Y)$ を

$$\begin{aligned} F_p(\boldsymbol{b} : \Lambda; X, Y) := &\left(\frac{(1 + \Lambda^p X^p)(1 + \Lambda^p Y^p)}{1 + \Lambda^p (X + Y + \Lambda XY)^p)}\right)^{\frac{1}{p\Lambda^p}\Phi_0(\boldsymbol{b})} \\ &\cdot \left(\frac{(1 + \Lambda^{p^2} X^{p^2})(1 + \Lambda^{p^2} Y^{p^2})}{1 + \Lambda^{p^2}(X + Y + \Lambda XY)^{p^2})}\right)^{\frac{1}{p^2\Lambda^{p^2}}\Phi_1(\boldsymbol{b})} \\ &\cdot \left(\frac{(1 + \Lambda^{p^3} X^{p^3})(1 + \Lambda^{p^3} Y^{p^3})}{1 + \Lambda^{p^3}(X + Y + \Lambda XY)^{p^2}}\right)^{\frac{1}{p^3\Lambda^{p^3}}\Phi_2(\boldsymbol{b})} \cdots\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

によって定義する。このとき，補題 3.2 により

$$\begin{aligned} &F_p(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}) : \Lambda; X, Y) \\ &\qquad = \frac{E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X)E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; Y)}{E_p(\boldsymbol{a} : \Lambda; X + Y + \Lambda XY)} \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[X, Y]] \end{aligned}$$

が成り立つが，この事実を用いて，更に次を示すことが出来る。

補題 4.1 $b_0, b_1, \dots$ を変数とし，*Witt vector* $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \dots)$ に対して

$$F_p(\boldsymbol{b} : \Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\boldsymbol{b}, \Lambda][[X, Y]],$$

であり， $F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;X,Y)$ は *symmetric 2-cocycle conditions:*

$$\begin{aligned}&F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;X+Y+\Lambda XY,Z)F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;X,Y)\\&\quad=F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;X,Y+Z+\Lambda YZ)F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;Y,Z),\\&F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;X,Y)=F_p(\boldsymbol{b}:\Lambda;Y,X)\end{aligned}$$

を満たす。

5 主定理

以下， A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数, λ を p を割る A の元とする。このとき，補題 3.3，補題 4.1 により，準同型写像：

(18)
$$\begin{aligned}&\xi_A^0:{}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A)\to\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{m,A});\quad \boldsymbol{a}\mapsto E_p(\boldsymbol{a}:\lambda;X),\\&\xi_A^1:\widehat{W}(A)/F^{(\lambda)}\to\mathrm{H}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{m,A});\quad \boldsymbol{a}\mapsto F_p(\boldsymbol{a}:\lambda;X,Y),\\&\xi_A^0:{}_{F^{(\lambda)}}W(A)\to\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A});\quad \boldsymbol{a}\mapsto E_p(\boldsymbol{a}:\lambda;X),\\&\xi_A^1:W(A)/F^{(\lambda)}\to\mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A});\quad \boldsymbol{a}\mapsto F_p(\boldsymbol{a}:\lambda;X,Y)\end{aligned}$$

が得られる。これらは更に次のように同型であることが分かる。

定理 5.1 *A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数, λ を A のべき零元とする。このとき，(18) によって定義された準同型写像:*

$$\begin{aligned}&\xi_A^0:{}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A)\to\mathrm{Hom}_{A-gr}(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{m,A}),\\&\xi_A^0:{}_{F^{(\lambda)}}W(A)\to\mathrm{Hom}_{A-gr}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),\\&\xi_A^1:\widehat{W}(A)/F^{(\lambda)}\to\mathrm{H}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{m,A}),\\&\xi_A^1:W(A)/F^{(\lambda)}\to\mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})\end{aligned}$$

は同型写像である。

我々は，前節で Frobenius endomorphism の一般化を与え，Artin-Hasse exponential series の変形を与えたが，これらを用いることにより，証明は全く [9] の議論と同様に行われる。以下，その証明の概略を述べる。

以下，$P=\{p^\ell \mid \ell\geq 0\}\subset\mathbb{N}$ とおく。

補題 5.2 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数, λ を A の元, $F(T) \in A[[T]]^\times$ とする。F が関数等式 $F(X+Y+\lambda XY) = F(X)F(Y)$ を満たすとき, 元 $\boldsymbol{a} \in {}_{F(\lambda)}W(A)$ が存在し $F(T) = E_p(\boldsymbol{a}:\lambda;T)$ と表される。更に, λ がべき零元であり, $F(T) \in A[T]^\times$ であれば, $\boldsymbol{a} \in {}_{F(\lambda)}\widehat{W}(A)$ となる。

Proof. 元 $\boldsymbol{a} \in W(A)$ が存在し,

$$F(T) = E_p(\boldsymbol{a}:\lambda;T) \prod_{k\in P^c} E_p(c_kT^k)$$

と表されることが容易に示され, 与えられた関数等式を

$$G(T) = \prod_{k\in P^c} E_p(c_kT^k)$$

の関数等式に変形することにより, 補題の結果を得る。

また cocycle に関しても Lazard's comparison lemma [3, Lemme 3] を用いることにより, 次が得られる。

補題 5.3 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数とし $\lambda \in A$ とする。 このとき, $F(X,Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \subset A[[X,Y]]^\times$ に対して, 元 $\boldsymbol{a} \in W(A)$ と $G(T) = \prod_{k\notin P}(1+c_kT^k) \in A[[T]]^\times$ が存在し

$$F(X,Y) = F_p(\boldsymbol{a};\lambda;X,Y)G(X)G(Y)G(X+Y+\lambda XY)^{-1}$$

が成り立つ。

次は技術的な補題である。

補題 5.4 λ を A のべき零元とする。

$$F(X,Y) = 1 + H_1(X,Y) + H_2(X,Y) + \cdots + H_d(X,Y) \in A[X,Y]^\times$$

は, 次数 ℓ の同次式 H_ℓ をもつ可逆多項式とする。各 $i \geq 1$ に対して, $F_i(X,Y) \in A[[X,Y]]$ は同様に同次部分の和で書いた次のような形式ベキ級数とする。

$$F_i(X,Y) = 1 + H^{(i)}_{k_i}(X,Y) + H^{(i)}_{k_i+1}(X,Y) + \cdots$$

更に, $k_1 < k_2 < \cdots$ であり

$$F(X,Y) = \prod_{i\geq 1} F_i(X,Y) \tag{19}$$

を満たしているとする。各 i と各 $j \geq k_i$ に対して，

$$(20) \qquad (\textit{the coefficients of } H^{(i)}_{k_i}, \lambda)^{u(j/k_i)} \ni \textit{the coefficients of } H^{(i)}_j(X,Y)$$

とする。ただし， $u(b/a) := -[-b/a]$ とおく。 このとき，殆どすべての i について $F_i(X,Y) = 0$ であり，F_i は全て多項式である。

補題 5.3，補題 5.4 によって，cocycle は次のようにコントロールされる。

補題 5.5 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数，λ を A のベキ零元とする。 $F(X,Y) \in Z^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}) \subset A[X,Y]^\times$ とするとき，元 $\boldsymbol{a} \in \widehat{W}(A)$ と $G(T) = \prod_{k \notin P}(1 + c_k T^k) \in A[T]^\times$ が存在し

$$F(X,Y) = F(\boldsymbol{a} : \lambda; X, Y)G(X)G(Y)G(X + Y + \lambda XY)^{-1}$$

が成り立つ。

写像

$$\xi^0_A : {}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

と

$$\xi^0_A : {}_{F^{(\lambda)}}W(A) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

の全単射性は補題 5.2 に従う。

写像

$$\xi^1_A : \widehat{W}(A)/F^{(\lambda)} \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

と

$$\xi^1_A : W(A)/F^{(\lambda)} \to \mathrm{H}^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

の全射性は補題 5.3 と補題 5.5 に従う。更にこれらの単射性は，補題 5.2 の証明と同様の議論を行うことにより示される。

6 群スキーム $\mathcal{W}_2/(\mathbb{Z}/p^2)$ の決定

最後に，我々の結果の一つの応用を述べる。その為に，[4], [7] あるいは [8] から幾つかの結果を引用する。

この節を通して，ζ_n は 1 の原始 p^n 乗根であり，各 n について，$\zeta_n^p = \zeta_{n-1}$ を満たすものとする。また $A_n = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ とし，$\lambda_n = \zeta_n - 1$, $\lambda = \lambda_1$ とおく。このとき，完全系列

$$
(21) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathbb{Z}/p & \to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \to 0 \\ & & & x & \mapsto & \frac{1}{\lambda^p}\{(1+\lambda x)^p - 1\} & \end{array}
$$

が得られ，これは Artin-Schreier 完全系列から Kummer 完全系列への変形を与え，我々はこれを Kummer-Artin-Schreier 完全系列と呼ぶことにする。更に，高次元の場合には，Artin-Schreier-Witt 完全系列と Kummer 型完全系列の統一を与える完全系列

$$
(22) \qquad 0 \to \mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{i_n} \mathcal{W}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{V}_n \to 0
$$

は，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_{n-1}, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ に含まれる拡大として，$\mathcal{W}_1 = \mathcal{G}^{(\lambda)}$ として帰納的に構成される。

一方，この拡大群は，次の完全系列を用いることにより決定される。

$$
(23) \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{\alpha^{(\lambda)}} & \mathbb{G}_{m,A_1} & \xrightarrow{r^{(\lambda)}} & i_*\mathbb{G}_{m,A_1/\lambda} & \to 0 \\ & x & \mapsto & 1+\lambda x & & & \\ & & & y & \mapsto & y \mod \lambda & \end{array}
$$

ただし，$i : \mathrm{Spec}A_1/\lambda \hookrightarrow \mathrm{Spec}A_1$ は closed immersion である。実際，完全系列 (23) より，完全系列

$$
\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m,A_1}) \\ &\xrightarrow{r^{(\lambda)}} \mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, i_*\mathbb{G}_{m,A_1/\lambda}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m,A_1}) \end{aligned}
$$

が得られ， Hilbert Theorem 90 により $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m,A_1}) = 0$ であるから，全射準同型写像

$$
(24) \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, i_*\mathbb{G}_{m,A_1/\lambda})/r^{(\lambda)}(\mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m,A_1})) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})
$$

が得られる。従って，拡大群 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}_n, \mathcal{G}^{(\lambda)})$ を決定することは，本質的に準同型群 $\mathrm{Hom}(\mathcal{W}_n, i_*\mathbb{G}_{m,A_1/}$ $\mathrm{Hom}(i^*\mathcal{W}_n, \mathbb{G}_{m,A_1/\lambda})$ を決定することと同値である。 $i^*\mathcal{W}_n \cong W_n$ であるときの完全な答えは, [9] によって与えてある。

以下，群スキーム $\mathcal{V}_2$ の具体的な計算方法を我々の結果を用いて与えられることを示す。

Λ を変数とし，写像

$$\Psi^{(\Lambda)} : W \to W, \quad \text{or} \quad \Psi^{(\Lambda)} : \widehat{W} \to \widehat{W}$$

を次で定義する。

$$\Psi^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$$

とおくとき，$(n = 2, 3, \dots)$ に対して

$$(*_0) \qquad b_0 = \frac{p}{\Lambda^{p-1}} a_0$$

$$(*_1) \qquad \Phi_0\left(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{b})\right) = \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p \Phi_0\left(F(\boldsymbol{a})\right)$$

$$(*_n) \qquad \Phi_{n-1}\left(F^{(\Lambda)}(\boldsymbol{b})\right) = p\Phi_{n-2}\left(F(\boldsymbol{a})\right) + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^n} \Phi_{n-1}\left(F(\boldsymbol{a})\right)$$

ただし，$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots)$, $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \dots)$ とおく。このとき，次を得る。

補題 6.1 写像 $\Psi^{(\Lambda)} : W \to W$ は次の環上定義される。

$$\mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda, \frac{p}{\Lambda^{p-1}}, \frac{\Lambda^{p-1}}{p}]$$

例. $\Psi^{(\Lambda)}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ のとき，

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{p}{\Lambda^{p-1}} a_0, \\
b_1 &= a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1, \\
b_2 &= a_1 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^2} a_2 + \frac{1}{p}\left\{a_0^p + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^{p^2} a_1^2 - \left(a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1\right)^p\right\} \\
&\quad + p^{p-2} a_0^p + \frac{\Lambda^{p-1}}{p} \Lambda^{(p-1)^2} \left(a_0 + \left(\frac{p}{\Lambda^{p-1}}\right)^p a_1\right).
\end{aligned} \tag{25}$$

となる。

補題 6.1 より次が従う。

系 6.2 $\lambda = \zeta_1 - 1$ に対して，$\Psi^{(\lambda)} : W \to W$ は $\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_1]$ 上定義された準同型写像である。

こうした準備の下に，我々は次の結果を得る。

定理 6.3 A を，$\mathbb{Z}_{(p)}$ を支配する *DVR* t とする。このとき，次の図式は果敢である。

$$
\begin{array}{cccccc}
\xi_{(\lambda,\lambda)}: & {}_F\widehat{W}(A/\lambda) & \xrightarrow[\sim]{\xi^0_{A/\lambda}} & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_*\mathbb{G}_{m,A/\lambda}) & \xrightarrow[\sim]{\partial} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle p\cdot} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_*} \\
\xi_{(\lambda,\lambda^p)}: & {}_{F^{(\lambda)}}\widehat{W}(A/\lambda^p) & \xrightarrow[\sim]{\xi^0_{A/\lambda^p}} & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, i_*\mathbb{G}_{m,A/\lambda^p}) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\
 & \Big\uparrow{\scriptstyle \Psi^{(\lambda)}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi^*} \\
\xi_{(\lambda^p,\lambda^p)}: & {}_F\widehat{W}(A/\lambda^p) & \xrightarrow[\sim]{\xi^0_{A/\lambda^p}} & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{(\lambda^p)}, i_*\mathbb{G}_{m,A/\lambda^p}) & \xrightarrow[\sim]{\partial} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda^p)}, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}).
\end{array}
\tag{26}
$$

この定理より，$\mathcal{W}_2 = \xi_{(\lambda,\lambda)}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a} \in {}_F\widehat{W}(A/\lambda)$ とし，$\mathcal{V}_2 = \xi_{(\lambda^p,\lambda^p)}(\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{b} \in {}_F\widehat{W}(A/\lambda^p)$ とするとき，

$$\Psi^{(\lambda)}(\boldsymbol{b}) = (\lambda, 0, \dots) + p\boldsymbol{a}$$

が成り立ち，この等式を $\boldsymbol{b}$ について解くことにより，$\mathcal{V}_2$ が決定されるのである。

References

[1] Green, B. and Matignon, M., *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Forschungsschwerpunkt Arithmetik, Universität Heiderberg, Universität Mannheim, Heft Nr. 19, (1996)

[2] Illusie, L., *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4e série 12, 501-661(1979)

[3] Lazard, M., *Sur les groupes de Lie formels à un paramétre*, Bull. Soc. Math. France, 83, 251-274(1955)

[4] Sekiguchi, T., *On the deformations of Witt groups to tori II*, J. of Algebra 138(2), 273–297(1991)

[5] Sekiguchi, T. and Suwa, N., *A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring*, Tsukuba J. Math., 14(2), 459-487(1990)

[6] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *A note on extensions of algebraic and formal groups I, II*, Math. Z., 206, 567-575(1991), 217, 447-457(1994)

[7] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt theory*, (Preprint series), CHUO MATTH NO.41, (1994)

[8] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, 105–110(1994)

[9] SEKIGUCHI, T. and SUWA, N., *A note on extensions of algebraic and formal groups III*, to appear in Thohoku J.

[DG] DEMAZURE, M. and GABRIEL, P., *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland, 1970

[HZ] HAZEWINKEL, M., *Formal groups and applications*, Academic Press, 1978